## Олимпиада
## Юношеской математической школы
## II тур, 26 ноября 2017 года
## 8 класс. Основная аудитория

**1.** Найдите все последовательности $a_n$ с натуральными неповторяющимися членами, для которых $a_n$ делится на $a_{a_n}$ при всех $n$ .

**2.** Турнир по игре «Камень, ножницы, бумага»[1] проводится по олимпийской системе,[2] на него заявилось 16 игроков. Организаторы определили, кто с кем играет первый матч, победители каких матчей играют друг с другом в следующем и т. д. Известно, что каждый из участников собирается во всех играх выкидывать одно и то же, а что именно — выбирает перед самой первой игрой случайным образом. Сколько вариантов выбора есть у игроков, чтобы турнир закончился?

**3.** Прямая пересекает стороны $AB$ и $BC$ квадрата $ABCD$ в точках $X$ и $Y$, а продолжения сторон $AD$ и $CD$ — в точках $Z$ и $T$. Докажите, что треугольники $CXZ$ и $AYT$ имеют одинаковую площадь.

**4.** Костя выбрал 15 чисел от 1 до 30, и для каждого из них нашел значение выражения

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Андрей сделал то же самое для остальных 15 чисел. Может ли сумма значений, найденных Костей, быть равна сумме значений, найденных Андреем?

---

[1] В раунде игры «Камень, ножницы, бумага» участвуют два игрока, которые одновременно показывают одну из трёх фигур (камень, ножницы или бумагу). Если выбраны разные фигуры, то камень обыгрывает ножницы, ножницы обыгрывают бумагу, бумага обыгрывает камень. Если фигуры совпали, то раунд переигрывается.

[2] Турнир по олимпийской системе происходит так: $2^n$ игроков разбиваются на пары, в каждой паре происходит матч, и проигравший выбывает. Оставшиеся игроки снова разбиваются на пары, каждая пара играет по одному матчу, проигравшие выбывают. И так далее, пока не останется один победитель.

## Олимпиада
## Юношеской математической школы
## II тур, 26 ноября 2017 года
## 8 класс. Выводная аудитория

**5.** В кружке занимается 21 человек. Известно, что два кружковца дружат, если их фамилии содержат различное количество букв, иначе не дружат. При этом у каждого кружковца друзей в кружке столько же, сколько букв в фамилии. Всего в кружке 175 пар друзей. Определите длины фамилий кружковцев.

**6.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$. Угол $BAC$ равняется 37 градусам. $X$ — точка пересечения высоты из вершины $A$ с прямой, проходящей через $B$ параллельно основанию, $M$ — точка на прямой $AC$ такая, что $BM = MX$. Найдите градусную меру угла $MXB$.

**7.** Натуральные числа $a$, $b$, $c$, $d$, $e$ и $f < a$ таковы, что $abd+1$ делится на $c$, $ace+1$ делится на $b$, $bcf+1$ делится на $a$. Докажите, что если $d/c < 1 - e/b$, то $d/c < 1 - f/a$.