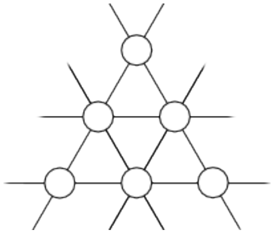
Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 26 ноября 2017 года
7 класс. Основная аудитория

1. В шести кружочках расставлены целые числа так, что суммы вдоль всех проведённых на рисунке прямых равны. Докажите, что сумма всех чисел делится на 9.



2. В фирме работают несколько сотрудников с суммарной месячной зарплатой 10 000 долларов. Добрый менеджер предлагает всем, у кого зарплата до 500 долларов, утроить её, а остальным повысить на 1000 долларов, тогда суммарная зарплата станет равной 24 000 долларам. Злой менеджер предлагает всем, у кого зарплата больше 500 долларов, снизить до 500, а остальным оставить как есть. Какой станет суммарная зарплата в этом случае?

3. Из шахматной доски вырезали 8 клеток. Для какого наибольшего n из оставшейся части гарантированно можно вырезать прямоугольник площадью n?

4. Проводится турнир по олимпийской системе[1] в игру «Камень, ножницы, бумага»,[2] на него заявились 1024 игрока. Известно, что 300 игроков будут каждым ходом выбрасывать камень, ещё 400 — ножницы, а остальные 324 — бумагу. Докажите, что турнир никогда не закончится.

[1] Турнир по олимпийской системе происходит так: 2^n игроков разбиваются на пары, в каждой паре происходит матч, и проигравший выбывает. Оставшиеся игроки снова разбиваются на пары, каждая пара играет по одному матчу, проигравшие выбывают. И так далее, пока не останется один победитель.

[2] В раунде игры «Камень, ножницы, бумага» участвуют два игрока, которые одновременно показывают одну из трёх фигур (камень, ножницы или бумагу). Если выбраны разные фигуры, то камень обыгрывает ножницы, ножницы обыгрывают бумагу, бумага обыгрывает камень. Если фигуры совпали, то раунд переигрывается.

Олимпиада
Юношеской математической школы
II тур, 26 ноября 2017 года
7 класс. Выводная аудитория

5. На тетрадном листе разрешено проводить прямые, проходящие хотя бы через два узла сетки, но не совпадающие с линиями сетки. Можно ли провести три прямые так, чтобы они ограничивали треугольник площадью $1/3$ клетки?

6. В кучке лежит 2017 камней. На i-м ходу какую-то из имеющихся кучек разбивают на две непустых кучки, после чего в одну из них добавляют i камней. Может ли оказаться так, что после двух или более ходов во всех кучках окажется поровну камней?

7. Докажите, что у клетчатого многоугольника с площадью 300 и периметром 300 есть сторона длиной больше 1. (Многоугольник не содержит дырок, то есть его граница — замкнутая ломаная без самопересечений.)