Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
14 октября 2023 года
11 класс

Решения

1. Вася взял простое число p и возвёл его в 2024-ю степень. Петя возвел p в 2023-ю степень и умножил получившееся число на 2. Коля сложил результаты Пети и Васи и прибавил к сумме единицу. При этом Коля утверждает, что у него получилась 2022-я степень какого-то натурального числа. Докажите, что кто-то из ребят обсчитался.

Решение. Обозначим за n число, 2022-ю степень которого получил Коля. Тогда, если все вычисления верны, то

$$p^{2024} + 2p^{2023} + 1 = n^{2022},$$
$$p^{2023}(p+2) = n^{2022} - 1,$$
$$p^{2023}(p+2) = (n^{1011} - 1)(n^{1011} + 1),$$

В правой части стоит произведение двух чисел, отличающихся на 2. Их НОД равен 1 или 2. Значит, либо $p = 2$, либо одна из скобок делится на p^{2023}.

1. Если $p = 2$, то левая часть равна 2^{2025}. То есть правая часть — тоже степень 2. Две степени двойки, отличающиеся на 2, — это 2 и 4. Тогда правая часть равна 2^3 и левая часть не равна правой.

2. Одна из скобок делится на p^{2023}. Тогда эта скобка не меньше p^{2023}, а вторая скобка не больше $p + 2$. Но для любого числа большего 2 это невозможно.

Таким образом, кто-то из ребят обсчитался.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Левая и правая части разложены на множители — 3 балла.

2. Вася в течение 14 дней ходит на фестиваль. В конце каждого дня он может взять синий, красный или зелёный билет. По окончании фестиваля подсчитываются очки всех участников следующим образом. За каждый синий билет участник получает одно очко. Число очков за каждый красный билет равно удвоенному число имеющихся у участника синих билетов. Число очков за каждый зелёный равно утроенному числу имеющихся у участника красных билетов. Какое наибольшее число очков может набрать Вася?

Решение. Предположим, что за все 14 дней фестиваля Вася взял x красных билетов. В таком случае каждый синий билет дает $2x + 1$ очко, а каждый зеленый — $3x$ очков. Тогда, если x не равно 0, то Васе выгоднее иметь зеленые билеты, чем синие. (Каждый синий дает не больше очков, чем каждый зеленый.)

Рассмотрим два случая: у Васи 0 красных билетов, у Васи есть только красные и зеленые билеты.

1. Если у Васи 0 красных билетов, то любой зеленый дает 0 очков, а синие дают максимум 14 очков. Итого Вася может получить максимум 14 очков.

2. Если у Васи есть только красные и зеленые билеты, то он получит $3x(14 - x)$ очков. Это выражение достигает максимума при $x = 7$. В этом случае Вася получает 147 очков.

Таким образом, наибольшее число очков, которое может получить Вася равно 147.

Ответ. 147.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Найден выерный ответ — 1 балл.

3. В летний лагерь приехали 2023 девочки и 2023 мальчика. Известно, что каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками. В конце лагеря проводится бал, в котором участвуют все дети в парах «мальчик — девочка».

Пусть N — число способов разбить детей на пары так, что каждый дружит со своим партнёром. Чему может равняться N? (Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

Решение. Посмотрим на всех девочек. Если среди них есть девочка у которой нет знакомых мальчиков, то на пары разбить нельзя и $N = 0$. Если есть девочка, которая дружит ровно с одним мальчиком, то она обязана быть в паре с этим мальчиком. Выкинем этих девочку и мальчика из дальнейшего рассмотрения. Так как эта девочка дружила ровно с одним мальчиком, которого выкинули, у всех оставшихся мальчиков все еще по две знакомые девочки. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не останутся только девочки, у которых не менее двух знакомых мальчиков.

Рассмотрим оставшихся детей как граф, в котором дети — вершины, дружба — ребро. Тогда граф двудольный — доля девочек и доля мальчиков. При этом степени всех вершин в одной доле равны двум, а во второй — не меньше двух. Так как вершин в долях одинаковое число, то степени всех вершин и во второй доле равны двум. Значит, граф представляет из себя набор циклов. Разбить цикл на пары можно двумя способами. Тогда всего имеется 2^k способов разбить граф на пары, где k — число циклов длины хотя бы 4.

Отметим, что в каждом цикле длины 4 не менее двух мальчиков. Значит, циклов длин 4 не более $\left[\dfrac{2023}{2}\right] = 1011$.

Также отметим, что выкидывая девочек, которые дружат ровно с одним мальчиком мы не могли получить пустой граф. Когда в графе останется две девочки и два мальчика единственный возможный вариант графа — цикл. Значит, в графе есть хотя бы один цикл.

Таким образом, возможные варианты для N — это 0 и степени двойки от 1 до 1011. Чтобы получить пример для $N = 0$ достаточно взять граф с изолированной вершиной. Чтобы получить пример для 2^k нужно взять $k - 1$ цикл длины 4 и остальные вершины объединить в один большой цикл.

Ответ. 0 и степени двойки от 1 до 1011.

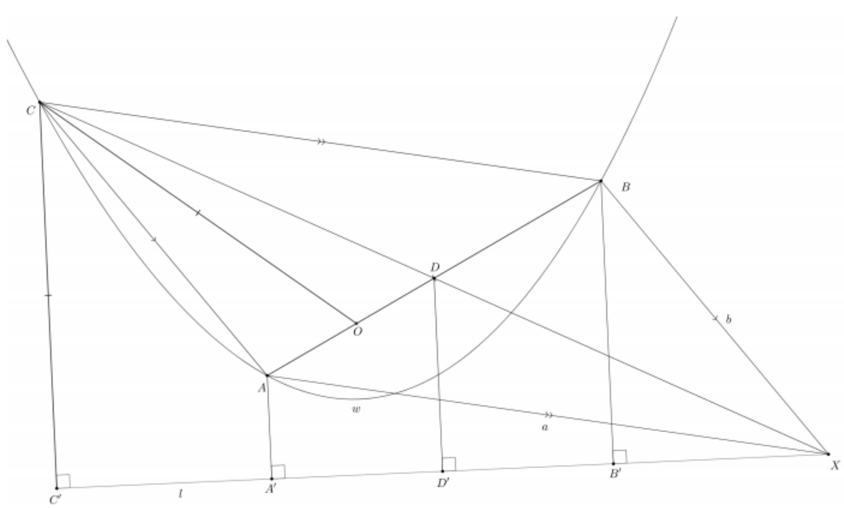
Критерии. Полное решение — 7 баллов.

4. На параболе ω выбрали точки A и B, оказалось, что отрезок AB проходит через фокус параболы — точку O. Затем на параболе отметили точку C так, что длины отрезков OC и AB равны. Через точку A провели прямую a, параллельную BC. Через B провели прямую b, параллельную AC. Докажите, что a, b и директриса параболы ω пересекаются в одной точке.

Фокусом и директрисой параболы называются такие точка O и прямая m, что для всякой точки X, лежащей на параболе, расстояние от X до m равно расстоянию от X до O.

Решение

Пусть l — директриса параболы ω, точка D — середина отрезка AB, прямые a и b пересекаются в точке X. Тогда $ACBX$ — параллелограмм. Следовательно, D — середина отрезка X. Пусть A', B', C', D' — проекции на прямую l точек A, B, C, D соответственно. Тогда $AO = AA', BO = BB', CO = CC'$. Заметим, что DD' средняя линия трапеции $ABB'A'$. Следовательно $DD' = \frac{AA'+BB'}{2} = \frac{AO+BO}{2} = \frac{AB}{2} = \frac{CO}{2} = \frac{CC'}{2}$. Тогда по теореме Фалеса точки X, C', D' лежат на одной прямой. Следовательно, точка X лежит на директрисе.



Критерии. Полное решение — 7 баллов.

5. Сколько решений в рациональных числах может иметь уравнение

$$x^3 + kx^2 - (k+3)x + 1 = 0,$$

где k — вещественный параметр? Приведите все возможности и докажите, что других нет.

Решение Покажем, что у уравнения может быть хотя бы один рациональный или иррациональный корень. Пусть a — рациональное/иррациональное число. Хотим чтобы

$$a^3 + ka^2 - (k+3)a + 1 = 0,$$

$$k = \frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}.$$

Выражение для k определено хотя бы для одного рационального и иррационального a.

Тогда следующая лемма доказывает, что уравнение может иметь либо три рациональных корня, либо три иррациональных корня.

Лемма Если уравнение

$$a^3 + ka^2 - (k+3)a + 1 = 0$$

имеет рациональный корень, то все его корни рациональные.

Доказательство леммы Пусть тогда a — рациональный ненулевой корень уравнения тогда

$$a^3 + ka^2 - (k+3)a + 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}.$$

Поставляя в исходное уравнение, получаем

$$x^3 + \left(\frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) x^2 - \left(\frac{3a^2 - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) x + 1 = 0.$$

Число a корень этого многочлена, стоящего в левой части. Значит, по теореме Безу он делится на $x - a$. Поделим в столбик и получим:

$$x^3 + \left(\frac{3a - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) a^2 - \left(\frac{3a^2 - a^3 - 1}{a^2 - a}\right) x + 1 = (x - a)\left(x^2 + \frac{3a - a^2 - 1}{a^2 - a} x - \frac{1}{a}\right).$$

Оставшееся квадратное уравнение имеет рациональные корни, если корень из дискриминанта рационален.

$$\mathrm{D} = \left(\frac{3a - a^2 - 1}{a^2 - a}\right)^2 + \frac{4}{a} = \left(\frac{a^2 - a + 1}{a^2 - a}\right)^2$$

Число a — рациональное, значит, дискриминант — квадрат рационального.

Ответ. уравнение может иметь 0 или 3 рациональных корня.

Замечание. Отметим, что если уравнение имеет три рациональных корня, то все корни различные. Если два из них совпадают, возьмем за a третий корень. Полученное выражение для дискриминанта не равно 0 для рациональных a, значит, двух равных корней быть не может.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

При отсутствии решения, каждый обоснованный случай дает 1 балл: пример уравнения с 3 рациональными корнями, пример уравнения с 3 иррациональными корнями, невозможность 2 рациональных корней.