Олимпиада
Юношеской математической школы
2 отборочный тур
14 октября 2023 года
10 класс

Решения

1. Даны три ненулевых числа a, b и c. Прямые $y = a\,x + b$, $y = b\,x + c$, $y = c\,x + a$ пересекаются попарно в трёх различных точках. Может ли через эти точки проходить парабола $y = a\,x^2 + b\,x + c$?

Решение. Не может. Например, прямая $y = b\,x + c$ имеет всего одну точку пересечения с графиком $y = a\,x^2 + b\,x + c$ — начало координат. А по условию парабола должна пересекать каждую из прямых в двух точках — точках пересечения с остальными прямыми.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Доказано, что одна из прямых пересекается с параболой только в точке $x = 0$ — 5 баллов.

2. Существуют ли натуральные числа a, b, c, такие что

$$\text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) = \text{НОК}(a, c)?$$

Решение. Докажем от противного, что таких a, b, c не существуют. Пусть такие натуральные числа существуют. Среди всех подходящих троек выберем ту, у которой число c минимально. Пусть эта тройка a, b, c. Предположим, что p — это простой делитель числа c. Тогда $\text{НОК}(a, c) \,\vdots\, p$ и $\text{НОК}(b, c) \,\vdots\, p$. Значит, $\text{НОК}(a, b)$ тоже делится на p. Построим новую тройку a', b', c':

$a' = a$, если $a \not\vdots\, p$, и $a' = a/p$, если $a \,\vdots\, p$;

$b' = b$, если $b \not\vdots\, p$, и $b' = b/p$, если $b \,\vdots\, p$;

$c' = c/p$.

Тогда:

$$p\,\text{НОК}(a', b') + p\,\text{НОК}(b', c') = p\,\text{НОК}(a', c').$$

Сокращая на p, получаем, что тройка чисел a', b', c' тоже удовлетворяет исходному равенству, но $c' < c$. Следовательно, c не может иметь простых делителей. Значит $c = 1$. Поэтому

$$\text{НОК}(a, b) + b = a \quad \Leftrightarrow \quad \text{НОК}(a, b) = a - b,$$

но это невозможно, так как $\text{НОК}(a, b) \geqslant a > a - b$.

Замечание 1. Можно не брать подходящую тройку с минимальным c, а провести процедуру деления на простой делитель числа c до тех пор, пока у c не останется простых делителей.

Замечание 2. Процедуру сокращения простого делителя можно также провести и с числами a и b.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Если показано, что можно сократить на простой делитель числа c (или числа a, или числа b), — 5 баллов.

Показано, что НОК двух чисел делится на третье — 2 балла.

3. Класс из 30 человек написал контрольную работу, за которую каждый получил оценку от 1 до 5. Непустая группа учеников называется хорошей, если сумма их оценок делится на 10. Какое наибольшее количество хороших групп может быть?

Ответ: $2^{29} - 1$.

Решение. Оценка. Рассмотрим одного из ученика (пусть это будет Вася). Если группа хорошая и в ней нет Васи, то при добавлении Васи она перестаёт быть хорошей. Если группа хорошая, а Вася в ней есть, то при удалении Васи из этой группы она перестаёт быть хорошей. Значит, на каждую хорошую группу найдётся хотя бы одна плохая. Кроме того, группа из одного Васи плохая, а ей соответствует пустая группа, которая не считается.

Пример строится, если все ученики получили пятёрки. Тогда все группы из чётного количества учеников — хорошие, а неравенство в оценке превращается в равенство.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

верный ответ — 1 балл.

Пример с численным ответом — 3 балла.

Оценка — 4 балла.

4. Пусть $ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Точки A' и C' симметричны точкам A и C относительно прямой BD, а точки B' и D' симметричны точкам B и D относительно прямой AC. Докажите, что четырёхугольник $A'B'C'D'$ вписанный.

Решение. Пусть $F = AC \cap BD$ — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Так как прямая $A'C'$ симметрична прямой AC относительно прямой BD, то $F \in A'C'$. Кроме того $A'F = FC'$. Поэтому $AF \cdot FC = A'F \cdot FC'$. Аналогично, $F \in B'D'$ и $BF \cdot FD = B'F \cdot FD'$. Так как $ABCD$ — вписанный, то $AF \cdot FC = BF \cdot FD$. Следовательно, $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$. Значит четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный. Действительно, из $A'F \cdot FC' = B'F \cdot FD'$ вытекает $\frac{A'F}{FD'} = \frac{B'F}{FC'}$, а так как $\angle A'FB' = \angle C'FD'$, то треугольники $A'FB'$ и $C'FD'$ подобны, и $\angle A'B'F = \angle D'C'F$. Поэтому четырёхугольник $A'B'C'D'$ — вписанный.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. При этом часть доказательства после слова «Действительно» можно опустить.

Не доказано, что диагонали старого и нового четырёхугольника пересекаются в одной и той же точке, но это используется в решении — не более 5 баллов.

5. Прямоугольник разрезан на прямоугольнички двумя горизонтальными и шестью вертикальными линиями. В каждом прямоугольничке Андрей записал то ли площадь, то ли периметр этого прямоугольничка (см. таблицу). Докажите, что Андрей ошибся.

400	402	404	406	408	410	412
300	306	312	318	324	330	336
200	208	216	224	232	240	248

Решение. Докажем, что найдётся две строки и два столбца, на пересечении которых написано одно и то же (либо площадь, либо периметр). Такую четвёрку прямоугольников назовём хорошей.

Назовём столбец полученной таблицы столбцом типа S, если хотя бы в двух прямоугольниках этого столбца записана площадь, и столбцом типа P — если записан периметр. Заметим, что у нас есть четыре столбца одинакового типа (пусть это будет тип S). В этих четырёх столбцах есть не более четырёх клеток, в которых записан периметр, а значит, найдутся две строки, в каждой из которых (на пересечении с четырьмя столбцами типа S) есть не более одного прямоугольника с периметром. А значит, два из четырёх столбцов типа S в пересечении с этими строками образуют хорошую четвёрку.

Заметим теперь следующее. Пусть есть хорошая четвёрка $\begin{array}{|c|c|}\hline \text{a} & \text{b} \\ \hline \text{c} & \text{d} \\ \hline\end{array}$ типа S (т.е. на каждой клетке написана площадь). Тогда выполнено соотношение $ad = bc$ (это соотношение следует из пропорциональности площадей). А для четёрки типа P выполнено соотношение $a + d = b + c$.

Наконец, докажем, что в предложенной в условии таблицы нет ни одной четвёрки прямоугольникав с таким соотношением. Пусть $a = x + ks$, $b = x + kt$, $c = y + ls$, $d = y + lt$ (где x, y равны 400, 300 или 200, а s, t равны 2, 6 или 8 соответственно). Если $a + d = b + c$, то $x + ks + y + lt = x + kt + y + ls$, т.е. $(k - l)(s - t) = 0$, чего не бывает. А если $ad = bc$, то $(x + ks)(y + lt) = (x + kt)(y + ls)$, т.е. $xlt + yks = xls + ykt$, или $(xl - yk)(t - s) = 0$. Мы уже выяснили, что $s \neq t$ (эти параметры отвечают за номера столбцов), но и $xl \neq yk$: если $x = 400$, то $k = 2$; если $x = 300$, то $k = 6$, а если $x = 200$, то $k = 8$, т.е. если $x > y$, то $l > k$, а тогда $xl > yk$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов. Соотношения $ad = bc$ (для площадей) и $a+d = b+c$ (для периметров) принимаются без доказательства. Если нет обоснования отсутствия таких соотношений в таблице — дыра в 2 балла.