



Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
5 класс



Решения

1. По узлам сетки квадрата 5×5 метров движется робот. За секунду он может либо проехать на 1 метр вперед, либо повернуться на 90° против часовой стрелки. Изначально робот находится в нижнем левом углу и смотрит вверх. За 13 секунд он смог добраться до правого верхнего угла. Сколькими способами робот мог это сделать?

Решение. Чтобы попасть в противоположный угол, робот должен сделать минимум 5 ходов по вертикали вверх и 5 ходов по горизонтали вправо. Изначально робот смотрит вверх, чтобы ему посмотреть вправо, нужно сделать минимум три поворота против часовой стрелки. Итого уже имеем $5 + 5 + 3 = 13$ ходов, то есть ровно столько, сколько есть у робота. Значит он сделал РОВНО три поворота, РОВНО 5 ходов вверх и РОВНО 5 ходов вправо, причем сначала шли все ходы вверх, а потом вправо (более, чем однократная смена направлений потребовала бы более трёх поворотов). Итак, робот сначала сделал пять ходов вверх, затем три поворота против часовой стрелки, затем пять ходов вправо. Ответ: один способ.

Критерии: Ответ 1 балл, описание единственного способа - 3 балла, баллы суммируются.

2. Петя и Вася живут в одном подъезде 41-этажного дома. Вася зашел в подъезд и оказался на первом этаже. После чего он поднялся к себе домой, а затем спустился в гости к Пете. Оказалось, что он прошел в два раза больше лестничных пролетов, чем он прошел бы, если поднялся сразу к Пете. С другой стороны он прошел столько же лестничных пролетов, сколько бы он прошел, поднявшись сразу на последний этаж. На каком этаже живет Вася?

Решение. Второе из условий говорит нам что дорога от Васиного этажа до последнего такая же по длине, как и от Васиного этажа до Петиноного. То есть, Васин этаж находится ровно посередине между Петиным и 41-ым. Первое же условие говорит нам, что дорога от первого этажа до Петиноного такая же, как дорога от Петиноного этажа до Васина и обратно, а эта дорога (как мы уже знаем из предыдущей фразы) — то же самое, что дорога от Петиноного этажа до 41-го. Итак Петя живет ровно посередине между 1 этажом и 41-ым. то есть, на 21-ом этаже, а Вася — на середине пути между Петиным этажом и последним, то есть на 31-ом этаже.

Критерии: Ответ 2 балла, объяснено где живет Петя — 3 балла, запись (правильных) действий, приводящих к ответу почти без комментариев – 4-5 баллов.

3. Рыбаки плотно расселись по берегу круглого пруда и начали удить рыбу. После того как была выловлена тысячная рыбина, они обнаружили, что каждый из них поймал столько карпов, сколько двое его соседей (слева и справа) вместе поймали щук. Водился ли в пруду ещё какой-либо вид рыб? Объясните свой ответ.

Ответ: да, водится. Если рыбак попросит каждого своего карпа пожать руку одной из соседних щук (каждый – своей щуке), то щук как раз хватит. В итоге каждая щука пожмет две руки — карпу слева и карпу справа. Поэтому всего карпов вдвое больше чем щук, а всего щук и карпов - втрое больше чем щук. Но 1000 не кратно трем, поэтому были пойманы и другие рыбы.

Критерии: ответ 0 баллов, мысль о том что карпов вдвое больше, чем щук без пояснений — 3 балла, мысль о том, что 1000 не делится на 3 – 2 балла, баллы суммируются

4. У Вари есть 27 карточек с двузначными числами (числа на карточках не повторяются). Докажите, что она может составить из двух своих карточек четырехзначное число, которое начинается и заканчивается одной и той же цифрой.

Решение. Вообразим на секундочку, что Варя не смогла так составить карточки. Что это значит? Это значит то, что ни у какой карточки цифра в разряде десятков не совпадает с цифрой в разряде единиц никакой ДРУГОЙ карточки. Значит все цифры разбиваются на несколько типов: встречающиеся только в разряде единиц 2) встречающиеся только в разряде десятков 3) встречающиеся и в разряде единиц, и в разряде десятков на одной-единственной карточке (и больше нигде) 4) не встречающиеся вовсе.

Если есть цифра типа 3) или 4) — например цифра А — то добавим в наш набор карточку ВА, где В — какая то из цифр типа 2) и выкинем из набора карточку АА, если она там была. Таким образом мы избавимся от

цифр 3-го и 4-го типа, не создав для Вари возможности составить нужное 4-значное число, а всего карточек по прежнему 27 или больше.

Теперь разберемся, сколько разных комбинаций-карточек из цифр двух типов могло быть сформировано. Цифр какого то из двух типов теперь не менее пяти. Если цифр какого-то типа пять, то второго – не более пяти, значит могло получиться не более $5 \cdot 5 = 25$ карточек, если цифр какого-то типа шесть, то второго – не более четырех, значит могло получиться не более $6 \cdot 4 = 24$ карточек, если какого-то семь, то не более $7 \cdot 3 = 21$ комбинаций, если восемь – не более $8 \cdot 2 = 16$ комбинаций, если девять – не более $9 \cdot 1 = 9$ комбинаций. Значит, в предположении, что у Вари ничего не получится, у нас никак не набирается 27 карточек из условия. Значит, всё у Вари получится!

Критерии: мысль о том, что 27 больше чем $5 \cdot 5$, поэтому сможет – 2 балла, решение, не учитывающее, что карточку АА нельзя поставить в пару с собой – 5 баллов, явно сказано, что если нельзя то комбинаций первой с последней — произведение не больше 25 – 4 балла.

5. В горах 20 поселков, любые два соединены отдельной дорогой — канатной или железной, причем из каждого поселка выходит не менее восьми дорог каждого типа. Экскурсовод пытался составить маршрут, проходящий по всем поселкам по разу и не требующий смены транспорта. Оказалось, что это невозможно! Приведите пример, как такое могло быть (и объясните, почему в Вашем примере невозможно разработать требуемый маршрут).

Решение. Пусть, например, одиннадцать поселков расположены на одной высоте (верхние поселки), девять – на другой (нижние), любые два поселка на одной высоте соединены железной дорогой, а дороги на разных высотах соединены канаткой. Тогда из каждого поселка отходит не менее восьми ж/д линий и не менее девяти канаток. Ж/д маршрута по всем поселкам не существует, так как, двигаясь по железке, нельзя переехать на другую высоту. Двигаясь только по канатке, нельзя объехать все города по разу, поскольку на любом канатном маршруте чередуются верхние и нижние поселки, поэтому их количества отличаются не более чем на один, а у нас верхних поселков на два больше, чем нижних.

Критерии. Правильная конструкция совсем без обоснования – 4 балла.