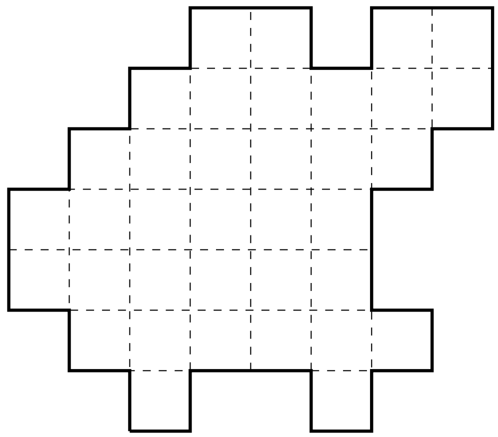
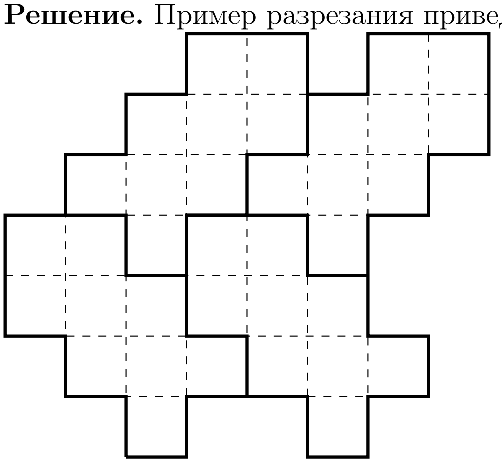
Олимпиада
Юношеской математической школы
1 отборочный тур
24 сентября 2023 года
4 класс

Решения

1. Разрежьте фигурку на рисунке на четыре равные части.



Решение. Пример разрезания приведён на картинке.



Критерии. Верный пример — 7 баллов.

2. Пасмурным летним днём состоялся дружеский матч между командами рыцарей и лжецов (первые всегда говорят правду, вторые — всегда лгут). С каждой стороны участвовали двое. После игры прозвучали следующие высказывания (по одному высказыванию от каждого игрока):

1) У рыцарей 12 очков, а у лжецов — 11.
2) У рыцарей 11 очков, а у лжецов — 12.
3) Рыцари победили.
4) Мы бы сыграли лучше, если бы нас не слепило солнце!

С каким счётом закончился матч?

Решение. 1) Заметим, что 4 точно лжец, поскольку по условию день был пасмурный, и солнце мешать игрокам не могло.

2) Среди 1 и 2 хотя бы один является лжецом, поскольку их утверждения противоречат друг другу, и не могут одновременно быть истинными.

3) Значит, 3 точно рыцарь, и его утверждение истинно.

4) Тогда 1 — рыцарь, а 2 — лжец.

Матч закончился 12-11 в пользу рыцарей.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Обосновано, что 4 лжец — 3 балла.

Указано, что 1 и 2 не могут быть оба рыцарями (кто-то из них врёт) — 2 балла.

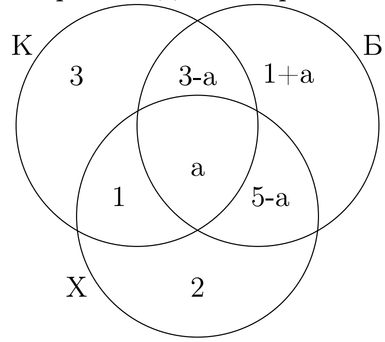
Ответ без объяснений — 1 балл.

3. В одном из классов интересной спортшколы учится 30 ребят. Из них кёрлингом занимаются 7, бобслеем — 9, 8 — хоббихорсингом (из которых двое — только им). Трое ходят на тренировки и по бобслею, и по кёрлингу одновременно. Пятеро — одновременно на бобслей и хоббихорсинг. Все остальные всё время уделяют черлидингу.

Сколько существует вариантов отправить на соревнования команду из спортсмена, который занимается хотя бы двумя видами спорта и чирлидера?

Ответ. 90, 105, 120 или 135 вариантов.

Решение. Расположим на кругах Эйлера все три вида спорта. Пусть a — количество учеников, занимающихся всеми тремя видами спорта. Расставим остальные числа в диаграмме.

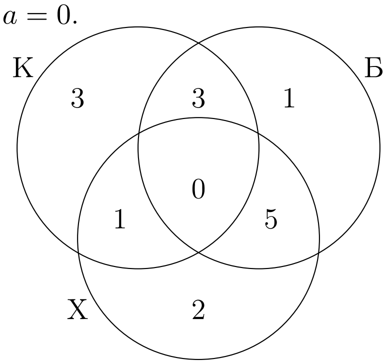


Нам подходят следующие варианты $a = 0$, 1, 2 или 3 (отрицательного количества учеников быть не может).

Всего этими видами спорта занимается 15 детей. Тогда чирлидеров $30 - 15 = 15$.

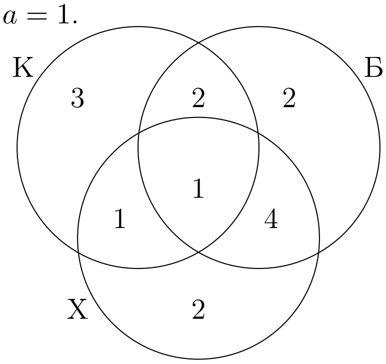
Рассмотрим варианты:

$a = 0$.



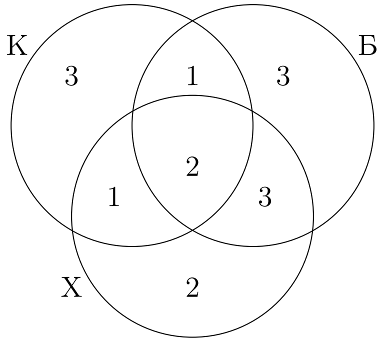
Хотя бы двумя видами спорта занимается 9 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $9 \cdot 15 = 135$.

$a = 1$.



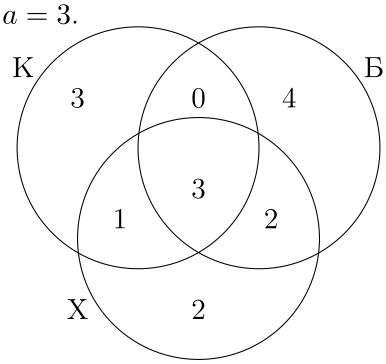
Хотя бы двумя видами спорта занимается 8 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $8 \cdot 15 = 120$.

$a = 2$.



Хотя бы двумя видами спорта занимается 7 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $7 \cdot 15 = 105$.

$a = 3$.



Хотя бы двумя видами спорта занимается 6 человек. Любому из них в пару можно дать любого из чирлидеров. Итого: $6 \cdot 15 = 90$.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Разобран один вариант — 2 балла.

Разобрано 2-3 варианта — 4 балла.

Разобраны все варианты, но не обосновано, что это все варианты — 5 баллов.

4. Вася и Петя задумали по пятизначному числу без повторяющихся цифр, причем разность между любыми соседними цифрами в их числах не меньше 7. У Пети получилось наибольшее возможное из таких чисел, а у Васи — наименьшее. Чему равна сумма задуманных ими чисел?

Ответ: 109899.

Решение. Петино число, чтобы быть наибольшим, должно иметь максимальные значения в каждом разряде, начиная с наибольшего. Начинаем с максимальной цифры — 9, следующая не может быть больше 2, но если она 2, то далее цепочка прервётся (9 уже занята), значит, следующая не больше 1, затем может идти только 8, и следом 0 и 7. Получается: 91807 Васино число, чтобы быть наименьшим, должно иметь минимальные значения в каждом разряде, начиная с наибольшего. Первая цифра не бывает 0, потому минимальная 1. Далее, минимальная подходящая 8. Затем 0. 9 и 2. Итого получаем: 18092. $91807 + 18092 = 109\,899$

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

За верно найденное (каждое) число (без объяснения, почему оно максимальное/минимальное) — 2 балла (т.е. в сумме до 4 баллов).

За верно найденное (каждое) число (с объяснением, почему оно максимальное/минимальное) — 3 балла (т.е. в сумме до 6 баллов).

Ошибка на этапе суммирования — 6 баллов (следует из критериев выше)

5. Трем школьникам поручено шесть ночей наблюдать за звездным небом, причем за каждым школьником закреплен конкретный участок неба. У них есть два телескопа. Если смотреть через первый телескоп, то будет видно вдвое больше звёзд, чем невооружённым глазом, а если через второй, то втрое больше. Каждую ночь двое школьников подходят к телескопам (а третий смотрит глазами), считают звёзды каждый на своём участке и складывают результаты. В понедельник ими было насчитано в сумме 2020 звёзд, во вторник — 2021, в среду — 2022, ..., в субботу — 2025 звёзд. Новых звезд за это время не появлялось, и никакие звезды не исчезали. Докажите, что кто-то из школьников обсчитался.

Решение. Всего существует шесть способов распределить школьников по телескопам (у первого три варианта — взять один из телескопов или смотреть глазами, у второго — два, так как один вариант уже занят первым, а третий берёт что осталось). Так как во все дни были получены разные результаты, каждый способ расстановки школьников по телескопам был задействован ровно один раз. Это значит, что каждый школьник дважды смотрел на свой участок глазами, дважды — через первый телескоп и дважды — через второй телескоп. То есть каждый школьник за шесть дней насчитает чётное число звёзд. Но всего они насчитали $2020+2021+2022+2023+2024+2025=12135$ звёзд, то есть нечётное количество.

Критерии. Полное решение — 7 баллов.

Идея про четность/нечетность суммы всего посчитанного (а дальше что-то пошло не так) — 4 балла.