



Олимпиада  
Юношеской математической школы  
1 отборочный тур  
24 сентября 2023 года  
10 класс



1. Квадратный трёхчлен  $x^2 - px + q$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа, имеет два корня. Оказалось, что если  $q$  уменьшить на 30%, то разность его корней увеличится в 5 раз. Найдите такой трёхчлен с наименьшей возможной суммой корней.

2. Андрей написал в каждой клетке квадрата  $4 \times 4$  число от 1 до 16 так, что все числа оказались написаны по одному разу. К квадрату подходит Лёня с четырёхклеточной фигурой (см. рис.) в руках. Лёня кладёт свою фигуру в квадрат так, чтобы сумма чисел в этой фигуре была максимально возможной (Лёня может поворачивать свою фигуру). Но Андрей хочет расставить числа так, чтобы сумма чисел в Лёниной фигуре была минимально возможной. Чему она будет равна?

3. Знайка взял натуральные числа  $a$  и  $b$  и выписал на первый лист все делители  $a$ , а на второй лист — все делители  $b$ . Оказалось, что на первом листе выписано 7 чисел, а в совокупности в двух списках Знайка выписал 10 различных чисел. Докажите, что  $\text{НОД}(a, b)$  — точный квадрат.

4. В турнире по футболу играли несколько команд. Каждые две команды сыграли один матч. За победу давали два очка, за ничью — одно очко, за проигрыш — ничего. После турнира выяснилось чем больше очков у команды, тем меньше голов она забила (суммарно за весь турнир) и тем больше голов пропустила. Какое наименьшее количество команд могло быть?

5. Окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $l_1$ , проходящая через точку  $A$ , второй раз пересекла окружность  $\omega_1$  в точке  $C$ , а  $\omega_2$  — в точке  $D$ . Через точку  $B$  провели прямую  $l_2$ , параллельную  $l_1$ , которая пересекла  $\omega_1$  в точке  $E$ . Оказалось, что прямая  $CE$  касается  $\omega_2$  в точке  $F$ . Докажите, что  $BF$  — биссектриса  $\angle DBE$ .