**Сюжет про случайные блуждания и гармонические функции**
(автор - с.н.с. ПОМИ РАН, к.ф-м.н. Д. С. Челкак)

В задачах данного сюжета речь идёт о случайных блужданиях на прямой и плоскости. Рассмотрим частицу, которая перемещается по точкам прямой, имеющим координаты, выражающиеся целыми числами или, соответственно, по точкам плоскости, обе координаты которых целые. Направление движения и длина скачка каждый раз выбирается независимо от предыдущего шага с заданной вероятностью. Например, при простом симметричном блуждании по прямой частица, находящаяся в точке с координатой $y$ перемещается с вероятностями по $\frac{1}{2}$ в одну из точек с координатами $y-1$ или $y+1$.

Пусть $f_n$ – вероятность когда-нибудь попасть в 0, стартуя из точки $n \in \mathbb{Z}$. В этом сюжете мы будем изучать $f_n$ для разных вариантов задания длин скачков и их вероятностей.

Начальные сведения по теории вероятностей Вы можете, например, почерпнуть в книге **Лютикас В.С. "Школьнику о теории вероятностей. Факультативный курс.**

Для решения задач этого сюжета Вам будет полезно следующее утверждение. Пусть последовательность $x_n$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению

$$a_k x_n + a_{k-1}x_{n-1} + \cdots + a_2 x_{n-k+2} + a_1 x_{n-k+1} + a_0 x_{n-k} = 0$$

и многочлен $a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ имеет $k$ различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Тогда справедлива явная формула

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n, \tag{1}$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_k$ определяются первыми $k$ членами последовательности. Если же среди корней многочлена есть кратные, например $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m = \mu$, то вместо $m$ геометрических прогрессий $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots \lambda_m^n$ в формуле (1) нужно использовать последовательности $\mu^n, n\mu^n, \ldots n^{m-1}\mu^n$.

**1.** Рассмотрим простое симметричное случайное блуждание на прямой. Докажите, что $f_0 = 1$, и для любого ненулевого целого числа $n$

$$f_n = \tfrac{1}{2}(f_{n-1} + f_{n+1}) \tag{2}$$

Выведите отсюда, что $f_n = 1$ для всех целых $n$.

**2.** Рассмотрим теперь несимметричное блуждание: пусть длина скачка по-прежнему равна 1, а вероятность пойти налево равна $p$, направо - $q = 1 - p$ $(p \neq q)$. Найдите $f_n$ для любого целого $n$.

**3.** Пусть теперь на каждом шагу возможны скачки $\pm 1$, $\pm 2$ с вероятностями $\frac{1}{4}$. Найдите $f_n$ для любого целого $n$.

**4.** Теперь изучим еще один симметричный случай: допускаются скачки $\pm 1$, $\pm 2$ с вероятностями $p$ и $q = \frac{1}{2} - p$ соответственно. Найдите $f_n$ для любого целого $n$.

**5.** Подумайте над дальнейшими обобщениями: рассмотрите скачки длиной $\pm 1$, $\pm 2$ с произвольными вероятностями; подумайте о более длинных скачках. Возможно, в этом пункте стоит выбрать какие-то отдельные (интересные Вам) случаи и найти вероятности вернуться в 0 для них.

**6.** Рассмотрим теперь функцию $h$, заданную в целочисленных точках плоскости и удовлетворяющую соотношению

$$h_{n,m} = \frac{1}{4}(h_{n-1,m} + h_{n+1,m} + h_{n,m-1} + h_{n,m+1}) \tag{3}$$

для любых целых $n$ и $m$. Докажите, что если $h$ ограничена, то она является постоянной.

**7.** Пусть функция $h$ удовлетворяют соотношению (3) для всех целых $(n,m) \neq (0,0)$. Обозначим

$$S_N := \sum_{(n,m)\ :\ \max\{|n|,|m|\}=N} h_{n,m}, \qquad T_n := h_{n,n} + h_{n,-n} + h_{-n,n} + h_{-n,-n}.$$

Докажите, что тогда $S_{N+1} - T_{N+1} = S_N + T_N + C$, где $C$ не зависит от $N$.

**8.** Пусть $f_{n,m}$ – вероятность когда-нибудь попасть в 0 для симметричного блуждания по плоскости (с вероятностью $\frac{1}{4}$ в каждую сторону), стартуя из точки $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. Докажите, что $f_{n',m'} \leqslant f_{n,m}$, если $|n'| \geqslant |n|$ и $|m'| \geqslant |m|$.

**9.** Подумайте, как применить соображения предыдущих пунктов для доказательства того, что $f_{n,m} = 1$ для всех $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

**10.** Подумайте о том, как применить рассуждения из пунктов 6-9 для других случайных блужданий на плоскости: симметричное блуждание по вершинам треугольной решетки ($\frac{1}{6}$ в каждую сторону), симметричное блуждание по вершинам шестиугольной решетки.