Решения задач районного тура олимпиады
Юношеской Математической Школы
11 класс

Сюжет 1

Задача 1

Вася может придумать такие числа, которые в сумме будут давать 0 (например, сто единиц и –100). Единица является корнем любого многочлена, сумма коэффициентов которого равна нулю, поэтому, какой бы многочлен не составил Игорь, единица будет его корнем.

Задача 2

Да, может.

Для того, чтобы доказать это, достаточно привести пример соответствующего набора чисел. Вот он: 2, 1/103, -1/103, пятьдесят "-1" и сорок восемь "+1". Докажем, что этот набор удовлетворяет условию задачи.

Пусть Игорь составил из этих чисел многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_{100}x^{100}$. Сумма чисел набора равна нулю, поэтому единица будет корнем этого многочлена. Производная этого многочлена равна $a_1+2a_2x+\ldots+100a_{100}x^{99}$. В единице это выражение принимает значение $a_1+2a_2+\ldots+100a_{100}$. Докажем, что это число не может равняться нулю. Для этого достаточно доказать, что оно не целое. Докажем это. Для этого разберём два варианта: когда среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ два нецелых, и когда одно. Пусть среди них два нецелых: $a_k=\frac{1}{103}$ и $a_l=-\frac{1}{103}$. Выражение $a_1+2a_2+\ldots+100a_{100}$ целое тогда и только тогда, когда сумма ka_k+la_l целая. При этом $ka_k+la_l=\frac{k-l}{103}$. Последнее число не равно нулю, так как k и l разные, но меньше единицы, так как $1\le k, l\le 100$. Поэтому оно нецелое, а следовательно и всё выражение нецелое.

Если же среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ одно нецелое $a_k=\pm\frac{1}{103}$, то выражение $a_1+2a_2+\ldots+100a_{100}$ целое, только если $\pm\frac{k}{103}$ целое. А это число, очевидно, не может быть целым, поэтому и всё выражение нецелое.

Таким образом, в единице многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_{100}x^{100}$ имеет корень и его производная в этой точке не равна нулю. Тогда многочлен имеет ещё один корень. Докажем это. Будем доказывать от противного. Действительно, пусть этот многочлен имеет один корень. Поделим его (многочлен) на (x-1). Получится многочлен 99-той степени F(x):

$F(x)=a_{100}x^{99}+(a_{99}+a_{100})x^{98}+\ldots+(a_2+a_3+\ldots+a_{100})x+(a_1+a_2+\ldots+a_{100})$. Он равен нулю в точке x=1, только если сумма его коэффициентов равна нулю, то есть $a_{100}+(a_{99}+a_{100})+\ldots+(a_1+\ldots+a_{100})=0\Leftrightarrow 100a_{100}+\ldots+2a_2+a_1=0$, но последнее утверждение, как мы уже показали, не выполнено, поэтому многочлен F(x) не равен нулю, когда x=1. Когда же $x\neq 0$, многочлен F(x) не равен нулю как частное двух не равных нулю чисел. Таким образом, многочлен F(x) не имеет корней, тогда как всякий многочлен нечётной степени имеет хотя бы один корень. Получили противоречие, поэтому многочлен

$a_0+a_1x+\ldots+a_{100}x^{100}$ имеет хотя бы два различных вещественных корня, что и требовалось доказать.

Задача 3

Да, может, выбрав a_1, …, a_{100} равными единице. Тогда составленный Игорем многочлен будет равен $x^{100}+\ldots+x+1$. Когда x=1, многочлен принимает значение 101. Во всех остальных точках многочлен равен $((x-1)^{101}-1)/(x-1)$. Функция $(x-1)^{101}-1$ больше единицы тогда и только тогда, когда x больше единицы. Таким образом, для x>1 многочлен равен частному двух положительных чисел, а для x<1 – частному двух отрицательных. Поэтому такой многочлен всегда положителен, ч. т. д.

Задача 4

Игорь выбрал многочлен $1+1/101x+1/2x^2+\ldots+1/52x^{99}+1/51x^{100} = (1+1/2x^2+1/3x^4+\ldots+1/51x^{100})+(1/101x+1/100x^3+\ldots+1/52x^{99})$. Докажем это. Прежде всего отметим, что этот многочлен, очевидно, положителен на промежутке $[-1,\ 1]$. Кроме того, так как все выбранные Васей числа положительны, то любой многочлен, который может получить Игорь, принимает положительное значение в нуле, и если на промежутке $[-1,\ 1]$ многочлен принимает также и отрицательные значения. Для этого нам понадобится лемма.

Лемма: У искомого многочлена минимум достигается в точке, меньшей нуля.

Доказательство: Пусть искомый многочлен равен $a_0+a_1x+\ldots+a_{100}x^{100}$. Очевидно, что для любых x>0 значение многочлена превышает его значение в нуле. Поэтому минимум многочлена на отрезке $[-1,\ 1]$ не может достигаться выше нуля. Пусть тогда его минимум достигается в нуле. Тогда он равен a_0. Рассмотри $x = -1/10^6$. $a_1x < -1/10^8$. Все остальные слагаемые, не считая первых двух, меньше или равны, чем $1/10^{12}$, поэтому их сумма меньше, чем $1/10^{10}$. Поэтому весь многочлен без первого члена меньше нуля, а, следовательно, значение многочлена в точке $x = -1/10^6$ меньше, чем его значение в нуле. Поэтому минимум многочлена не может достигаться в нуле. Лемма доказана.

Рассмотрим многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_{100}x^{100}$, который выбрал Игорь. Обозначим точку, в которой достигается минимум у этого многочлена, за x_0. По лемме, $x_0<0$. Рассмотрим коэффициенты при степенях n и m. Рассмотрим многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^m+\ldots+a_mx^n+\ldots+a_{100}x^{100}$, который отличается от предыдущего лишь коэффициентами при n-ной и m-мой степенях x. Разность первого многочлена и второго равна $a_n(x^n-x^m)-a_m(x^n-x^m)= (a_n-a_m)(x^n-x^m)$. Рассмотрим значение этой разности в точке x_0. Так как $-1<x<0$, то $x^n-x^m>0$ в трёх и только в трёх случаях: когда n чётно, а m нечётно, когда n и m нечётны и n>m, и когда n и m чётны и n<m. При этом многочлен $a_0+a_1x+\ldots+a_{100}x^{100}$ таков, что минимум его модуля на отрезке $[-1,\ 1]$ максимален по всем возможным при таком наборе коэффициентов многочленам. Поэтому вся разность должна быть больше нуля. Отсюда $a_n>a_m$. Таким образом, у многочлена $a_0+a_1x+\ldots+a_{100}x^{100}$ коэффициент при любой чётной степени больше коэффициента при любой нечётной, если обе степени чётны, то больший коэффициент стоит при большей степени, а если оба нечётны, то больший коэффициент стоит при меньшей степени. Из этих условий и получаем многочлен $(1+1/2x^2+1/3x^4+\ldots+1/51x^{100})+$ $(1/101x+1/100x^3+\ldots+1/52x^{99})$.

Сюжет 3

Задача 1

Пусть стороны треугольника равны a, b и c; напротив стороны a лежит угол α, напротив стороны b – угол β, напротив стороны c – угол γ. По правилу треугольника,

$a+b>c$
$a+c>b$
$b+c>a$

¿
{¿{¿¿¿
¿

Но с другой стороны, по теореме синусов, $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2\text{R}$, где R – радиус описанной окружности. Поэтому $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{a}{2\text{R}}+\frac{b}{2\text{R}}=\frac{a+b}{2\text{R}}>\frac{c}{2\text{R}}=\sin\gamma$, то есть $\sin\alpha+\sin\beta>\sin\gamma$. Аналогично, $\sin\alpha+\sin\gamma>\sin\beta$ и $\sin\beta+\sin\gamma>\sin\alpha$.

Таким образом, числа $\sin\alpha$, $\sin\beta$ и $\sin\gamma$ удовлетворяют неравенствам треугольника, а следовательно, из них можно составить треугольник.

Задача 2

Обозначим углы треугольника за α, β и γ. Тогда утверждение задачи равносильно тому, что из трёх чисел tgαtgβ, tgαtgγ и tgβtgγ хотя бы одно не меньше трёх, хотя бы два не меньше двух и все они не меньше единицы.

1. Среди этих трёх чисел есть хотя бы одно, не меньшее тройки.

Пусть α и β - два наибольших угла. Докажем, что tgαtgβ≥3. Так как γ - минимальный угол, то, очевидно, γ≤π/3. Пусть угол α лежит в вершине A, угол β - в вершине B, угол γ - в вершине C. Опустим высоту из вершины C. Она упала в точку H. $tg\,\alpha tg\,\beta=\frac{|CH|^2}{|AH||HB|}$. Мы знаем, что $|AH|+|HB|=|AB|$. По теореме о среднем арифметическом и среднем геометрическом, $\frac{|AH|+|HB|}{2}\geq\sqrt{|AH||HB|}$, то есть $\frac{1}{|AH||HB|}\geq\frac{1}{\left(\frac{AB}{2}\right)^2}$, откуда $tg\,\alpha tg\,\beta\geq\left(\frac{2|CH|}{|AB|}\right)^2$. Осталось доказать, что $\frac{2|CH|}{|AB|}\geq\sqrt{3}$. Построим точку C' так, что длина перпендикуляра, опущенного из неё на сторону AB была равна высоте CH, и AC'=BC'. Очевидно, что такая точка существует. γ - минимальный угол из трёх углов треугольника ABC, следовательно, AB в нём минимальная сторона. Очевидно, что из двух отрезков AC и BC один длиннее, а другой короче, чем AC'. Поэтому AB – минимальная сторона и в треугольнике ABC'. Поэтому и угол C' в этом треугольнике самый маленький, откуда следует, что он не больше, чем π/3. Значит, угол A в этом треугольнике не меньше, чем π/3. Следовательно, $\frac{2|C'H|}{|AB|}\ge\sqrt{3}$, то есть $\frac{2|CH|}{|AB|}\ge\sqrt{3}$ и $tg\,\alpha tg\,\beta\ge 3$, ч. т. д.

2. Хотя бы два из этих чисел не меньше двойки.

Будем доказывать от противного: пусть не более одного из этих чисел больше или равны двойке. Тогда есть два из них, которые меньше двойки. Пусть это $tg\,\alpha tg\,\beta$ и $tg\,\alpha tg\,\gamma$. Тогда их сумма меньше 4: $tg\,\alpha(tg\,\beta+tg\,\gamma)<4$. С учётом того, что α+β+γ=π, имеем: $tg(\pi-\gamma-\beta)(tg\,\beta+tg\,\gamma)<4\Leftrightarrow$ $-tg(\beta+\gamma)(tg\,\beta+tg\,\gamma)<4\Leftrightarrow$ $\frac{(tg\,\beta+tg\,\gamma)^2}{tg\,\beta\,tg\,\gamma-1}<4\Leftrightarrow$ $(tg\,\beta-tg\,\gamma)^2<-4$. Пришли к противоречию, значит, действительно, хотя бы два из этих чисел не меньше двойки.

3. Каждое из этих чисел не меньше единицы.

Отметим на прямой AB такую точку K, что $ACK=\pi/2$. Так как $ACB<\pi/2$, то точка K лежит на луче AB за точкой B. $tg\,\alpha tg\,\beta=\frac{|CH|^2}{|AH||HB|}>\frac{|CH|^2}{|AH||HK|}=1$ (последнее равенство является простым свойством высоты прямоугольного треугольника), то есть $tg\,\alpha tg\,\beta>1$.

Задача 3

Обозначим углы треугольника за α, β и γ, причём $\alpha\le\beta\le\gamma$. Тогда $ctg\,\alpha\ge ctg\,\beta\ge ctg\,\gamma$. Чтобы доказать, что эти три котангенса являются сторонами треугольника, достаточно доказать, что $ctg\,\beta+ctg\,\gamma\ge ctg\,\alpha$. Остальные два неравенства треугольника, очевидно, будут следовать из этого.

Возьмем вторую производную котангенса:

$(ctgx)''=\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)'=-\frac{2\sin x\cos x}{\sin^4 x}$. Полученное выражение не больше нуля при $x\in[0,\pi/2]$, поэтому функция ctg x выпукла вниз на этом промежутке. Следовательно, непосредственно по определению выпуклости, для любых β и γ из этого промежутка $\frac{ctg\,\beta+ctg\,\gamma}{2}\ge ctg\frac{\beta+\gamma}{2}$.

С одной стороны, мы должны для любых α, β и γ, удовлетворяющих условию задачи, доказать неравенство $ctg\,\beta+ctg\,\gamma\ge ctg\,\alpha$. С другой стороны, так как $\frac{ctg\,\beta+ctg\,\gamma}{2}\ge ctg\frac{\beta+\gamma}{2}$, то неравенство $ctg\,\beta+ctg\,\gamma\ge ctg\,\alpha$ следует из неравенства $2\,ctg\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\ge ctg\,\alpha$. Таким образом, нам необходимо и достаточно доказать, что если β=γ, то $ctg\,\beta+ctg\,\gamma\ge ctg\,\alpha$, то есть $2\,ctg\,\beta\ge ctg\,\alpha$.

Докажем это. Прежде всего, обозначим ctgβ за x. С учётом того, что $ctg(\pi-2\beta)=-ctg\,2\beta=\frac{1-ctg^2\beta}{2\,ctg\,\beta}$, требуемое неравенство обращается в $2x\ge\frac{1-x^2}{2x}$, что равносильно $5x^2\ge 1$, то есть, так как x положительно, $x\ge\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Мы знаем, что $cos\,\alpha\le\frac{2}{3}$. Так как $\alpha\in[0,\pi/2]$, то это означает, что $\sin\alpha\ge\frac{\sqrt{5}}{3}$ и $ctg\,\alpha\le\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$ctg\,\alpha\le\frac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow \frac{1-x^2}{2\mathrm{x}}\le\frac{2}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow x^2+\frac{4}{\sqrt{5}}x-1\ge0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge\frac{1}{\sqrt{5}} \\ x\le-\sqrt{5}\end{array}\right.$, но x неотрицательно, значит, $x\ge\frac{1}{\sqrt{5}}$, чего, как мы знаем, достаточно для доказательства неравенства $ctg\,\beta+ctg\,\gamma\ge ctg\,\alpha$, из которого следует, что существует треугольник, у которого длинны сторон равны $ctg\,\alpha, ctg\,\beta$ и $ctg\,\gamma$, ч.т.д.

Задача 4

Обозначим углы треугольника за α, β и γ. Существует треугольник со сторонами, равными тангенсам этих углов, поэтому эти тангенсы положительны, откуда следует, что α, β и γ <π/2. Остаётся доказать, что эти три угла больше, чем π/4.

Мы знаем, что $tg\,\alpha+tg\,\beta\ge tg\,\gamma$. Поэтому, так как $\gamma=\pi-\beta-\alpha$, то $tg\,\alpha+tg\,\beta\ge-tg(\alpha+\beta)$, откуда, по формуле тангенса суммы, $tg\,\alpha+tg\,\beta\ge-\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha tg\,\beta}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{tg\,\alpha\,tg\,\beta-1}$. $tg\,\alpha+tg\,\beta$ положительно, поэтому при делении на эту сумму неравенство сохранится. Выражение в правой части равно tgγ, и, следовательно, тоже должно быть положительно (стороны треугольника положительны). Поэтому и знаменатель последней дроби положителен, и при домножении на него неравенство сохранится. Таким образом, мы знаем, что $tg\,\alpha tg\,\beta-1\ge1\Leftrightarrow tg\,\alpha\,tg\,\beta\ge2$. Аналогично, $tg\,\alpha tg\,\gamma\ge2$ и $tg\,\gamma tg\,\beta\ge2$.

Пусть какой-то из углов не больше, чем π/4. Не умаляя общности, α≤π/4. Тогда tgα≤1, и, очевидно, tgβ и tgγ ≥ 2. Тогда ctgα≥1, а ctgβ и ctgγ ≤1/2, откуда явствует, что ctgα≥ctgβ+ctgγ. Однако мы знаем, что существует треугольник со сторонами ctgα, ctgβ и ctgγ, и, следовательно, ctgα<ctgβ+ctgγ. Получили противоречие, поэтому все углы треугольника больше, чем π/4.

Таким образом все углы треугольника больше, чем π/4 и меньше, чем π/2, что и требовалось доказать.