Заочный тур олимпиады ЮМШ.
Решения 11 класса

Сюжет 1

Задача 1.
Да, такое число существует, это число 3^{27}.
$f(3^{27})=\log_3 3^{27}=27$;
$f(f(3^{27}))=f(27)=\log_3 27=\log_3 3^3=3$;
$f(f(f(3^{27})))=f(f(27))=f(3)=\log_3 3=1$.

Задача 2.
Нет, не найдутся.
Действительно, пусть нашлись такие три различных натуральных числа a, b и c, что $\log_a b$, $\log_b c$ и $\log_c a$ – целые числа (соответственно, k, l и m). В основании логарифма не может быть единица, значит, a, b и c не равны единице, а k, l и m ненулевые. Поэтому |k|, |l| и |m| натуральные.
Посмотрим на произведение klm: $klm = \log_a b*\log_b c*\log_c a = \log_a c*\log_c a = 1$. Поэтому и $|k|*|l|*|m| = |klm| = 1$. Если произведение трёх натуральных чисел равно единице, то и сами эти числа равны единице, поэтому$|k|=|l|=|m|=1$. Однако если k=1, то $\log_a b=1$, а значит a=b, чего быть не может, так как числа a, b и c различны. Поэтому k = -1. Аналогично, и l = m = -1, и в произведении эти три числа дают –1. Получили противоречие с тем, что klm=1. То есть наше предположение о существовании таких трёх чисел a, b и c неверно.

Задача 3.
Будем доказывать от противного. Предположим, что $(\log_2(n+1) + \log_2(n+2) + \ldots + \log_2(n+100))/100$ рационально. Тогда $\log_2(n+1) + \log_2(n+2) + \ldots + \log_2(n+100)$ рационально, т.е. $\log_2((n+1)(n+2)\ldots(n+100))$ рационально. Следовательно, $(n+1)(n+2)\ldots(n+100)$ – рациональная степень двойки и $(n+1)(n+2)\ldots(n+100)$ натуральная степень двойки. Действительно, при натуральных a и b $(2^a)^{1/b}$ натурально, только если a кратно b, и степень не равна нулю, так как $(n+1)(n+2)\ldots(n+100)$ не равно единице. Однако данное произведение является натуральной степенью двойки, только если все его множители являются натуральными степенями двойки, что невозможно, так как все эти числа различны и 50 из них нечётны, а из степеней двойки нечётна только единица. Получили противоречие, следовательно, для любых n и k $(\log_2(n+1) + \log_2(n+2) + \ldots + \log_2(n+100))/100$ иррационально.

Задача 4.
Будем доказывать от противного. Пусть $(\log_k(n+1) + \log_k(n+2) + \ldots + \log_k(n+100))/100$ рационально. Тогда $\log_k(n+1) + \log_k(n+2) + \ldots + \log_k(n+100)$ рационально, т.е. $\log_k((n+1)(n+2)\ldots(n+100))$ рационален. Следовательно, $(n+1)(n+2)\ldots(n+100)$ – рациональная степень k. Пусть это степень a/b, где a и b натуральные и взаимно простые. Рассмотрим каноническое разложение k: $k=2^p*3^q*\ldots*k_n^r$. $k^a = 2^{ap}*3^{aq}*\ldots*k_n^{ar} = ((n+1)(n+2)\ldots(n+100))^b$, поэтому ap кратно b, aq кратно b, …, ar кратно b; но так как a и b взаимнопросты, то p, q, …, r кратны b. Отсюда k – натуральное число в степени b, значит, $(n+1)(n+2)\ldots(n+100)$ – натуральная степень натурального не более чем десятизначного числа, которое обозначим, как m^t. Произведение $(n+1)(n+2)\ldots(n+100)$ содержит не менее 33-х чисел, кратных трём; из них не менее 11-ти кратны 9, из них не менее 3-х

кратны 27, из них хотя бы одно, кратное 81. Итого, степень тройки в каноническом разложении (n+1)(n+2)…(n+100) не менее 33+11+3+1=48. Как нетрудно убедиться, $3^{12} = (3^6)^2 = 729^2 = 531441$, поэтому $3^{48} = (3^{12})^4 = 531441^4 > (5*10^5)^4 = 625*10^{20}$, то есть у этого числа больше двадцати цифр, значит, и у (n+1)(n+2)…(n+100) больше двадцати цифр, поэтому t > 2. Однако, очевидно, что каноническое разложение числа (n+1)(n+2)…(n+100) обязательно содержит 97, но в степени не более двух, поэтому и t может быть не более двух. Получили противоречие. Следовательно, таких n и k, что $(\log_k(n+1) + \log_k(n+2) + \ldots + \log_k(n+100))/100$ рационален, не существует, значит, для любых n и k $(\log_k(n+1) + \log_k(n+2) + \ldots + \log_k(n+100))/100$ иррационально.

<u>Сюжет 2</u>

Задача 1.

Существуют.

Например, набор (π/6, π/6, π/4) удовлетворяет всем условиям задачи. Действительно,

$\pi/6 < \pi/2$;

$\pi/4 < \pi/2$;

$\pi/6 + \pi/4 = 5\pi/12 \neq \pi/2$;

$\pi/6 + \pi/6 = \pi/3 \neq \pi/2$;

$\pi/6 + \pi/6 + \pi/4 \neq \pi$;

$\sin^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2(\pi/6) + \cos^2(\pi/6) = 1 = \mathrm{tg}^2(\pi/4) = \mathrm{tg}^2\gamma$.

Задача 2.

Уравнение имеет одно решение.

Докажем это.

Множество значений функции tg(cos x) – это множество значений tg x при $x \in [-1, 1]$, а на этом промежутке тангенс определён, непрерывен и монотонен, поэтому множество значений tg(cos x) (по вещественным x) – это интервал [-tg1, tg1] (т. к. tg(-1) = -tg1). Но так как $\mathrm{tg}1 < \mathrm{tg}(\pi/3) < \sqrt{3} < 2 < 2\pi/3$, то при $|x| > 2\pi/3$ x не может быть корнем, и, значит, нам достаточно (хоть и не необходимо) исследовать на количество корней лишь интервал [-2π/3, 2π/3].

Разобьём данный интервал на три части: [-2π/3, -π/2], (-π/2, 0) и [0, 2π/3], и рассмотрим их по отдельности.

1. [0, 2π/3]. Рассмотрим функцию f(x) = tg(cos x)–x на интервале [0, 2π/3]. $f'(x) = -(\sin x)/\cos^2(\cos x)-1$, что, очевидно, меньше нуля на нашем интервале, поэтому на нём она монотонно убывает, и, следовательно, имеет на нём не более одного корня. Но при этом f(0) = tg1 > 0, f(2π/3) = tg(-1/2)-2π/3 < 0, поэтому, так как f(x) непрерывна, то она имеет хотя бы один корень на этом интервале. Итого, уравнение tg(cos x)=x на интервале [0, 2π/3] имеет ровно один корень.

2. (-π/2, 0). На этом отрезке sin x < 0, поэтому $(\mathrm{tg}(\cos x))' = -(\sin x)/\cos^2(\cos x) > 0$, а tg(cos -π/2) = 0, и, значит, на этом отрезке tg(cos x) ≥ 0, а x<0, значит, в этом случае корней нет.

3. [-2π/3, -π/2]. $(\mathrm{tg}(\cos x))' = -(\sin x)/\cos^2(\cos x)$, что, очевидно, больше нуля на этом интервале, поэтому tg(cos x) монотонно возрастает, и, значит, достигает минимума в левой границе интервала. Соответственно, этот минимум равен tg (cos –2π/3) = tg(-1/2); функция x тоже монотонно возрастает, и, значит,

достигает максимума в правой границе интервала. Он (максимум) равен $-\pi/2$. Но $tg(-1/2) > tg(-\pi/6) = -1/\sqrt{3} > -1 > -\pi/2$. Т. е., на интервале $[-2\pi/3, -\pi/2]$ минимум tg (cos x) больше максимума x, и, значит, все значения tg(cos x) больше всех значений x, следовательно, уравнение tg(cos x) = x не может иметь корней на этом интервале.

Итого, уравнение имеет одно решение на интервале $[-2\pi/3, 2\pi/3]$, значит, оно имеет всего одно решение, ч. т. д.

Задача 3.

Известно что для $x>0$ верно неравенство $\sin x<x$. В частности, $\sin1<1$, $\sin1/2<1/2$, …, $\sin1/2^n<1/2^n$. Поэтому $\sin1 + \sin1/2 + \sin1/4 +\ldots+ \sin1/2^n < 1 + 1/2 + 1/4 +\ldots +1/2^n < 1 + 1/2 + 1/4 +\ldots+ 1/2^n +\ldots = 2$. Т.е. $\sin1 + \sin1/2 + \sin1/4 +\ldots+ \sin1/2^n < 2$, ч. т. д.

Задача 4.

Нет, не может.

Так как $\cos1 < \cos1/2 <\ldots< \cos1/2^n$, то $tg1 + tg1/2 +\ldots+ tg1/2^n = \sin1/\cos1 + (\sin1/2)/(\cos1/2)+\ldots+ (\sin1/2^n)/(\cos1/2^n) < \sin1/\cos1 + (\sin1/2)/\cos1 +\ldots+ (\sin1/2^n)/\cos1 < 2/\cos1$. Последнее неравенство следует из результата предыдущей задачи.

Таким образом, $tg1 + tg1/2 +\ldots+ tg1/2^n$ ограничен, ч. т. д.

<u>Сюжет 3</u>

Задача 1.

Будем доказывать от противного. Пусть нам удалось из грибов сложить куб 10x10x10. Посмотрим, каким образом заполнен угол. В угловой клетке лежит угол какого-то гриба. Шляпка этого гриба примыкает к какой-то грани куба. Назовём слой куба, в котором лежит шляпка, первым. Соответственно, ножка гриба лежит во втором слое.

Угловая клетка во втором слое должна быть заполнена углом какого-то гриба (потому что если она заполнена стороной, то соседний угол этого гриба лежит либо вне куба, либо в первом грибе, а если она заполнена ножкой, то, очевидно, какой-то кубик второго гриба лежит вне куба), причём шляпка второго гриба не лежит во второй плоскости. Введём систему координат: ось Z будет перпендикулярна шляпке первого гриба, ось Y – шляпке второго, ось X – оставшаяся, причём выходить оси будут из углового кубика, заполненного первым грибом (начало координат – точка (1, 1, 1)).

1	1	1
1	1	1
1	1	1

	1	
2	2	2

	2	
2	2	2

2	2	2

Клетка (1, 2, 2), очевидно может быть заполнена только углом гриба, и шляпка этого, третьего, гриба, дабы не пересечь ножку первого гриба, должна быть перпендикулярна оси X. Далее, клетка (2, 3, 2) не заполнена первыми тремя грибами, и, очевидно, не может быть заполнена ни стороной, ни ножкой гриба, значит, она заполнена углом четвёртого гриба. При этом, так как клетки (2, 3, 1) и (2, 3, 3) заполнены, то шляпка этого гриба перпендикулярна оси Z.

		4	
1	1	1	
1	1	1	
1	1	1	

	4	4	4
3	4	4	4
3	4	4	4
3	1		
2	2	2	

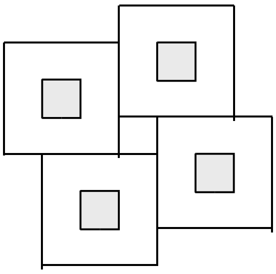
3		4	
3	3		
3	2		
2	2	2	

3			
3			
3			
2	2	2	

Ножка четвёртого гриба может попасть в первую или в третью плоскость, но в независимости от этого клетка (1, 4, 1), не заполненная первыми четырьмя грибами, не может быть заполнена стороной гриба (иначе соседний к этой стороне угол окажется вне куба или в первом грибе) или ножкой гриба (иначе гриб вылезет за пределы куба). А если она (клетка) заполнена углом гриба, то, так как клетка (1, 4, 2) заполнена третьим грибом, шляпка пятого гриба может быть перпендикулярна только оси Z, и его ножка попадает либо в клетку (2, 3, 2), либо в клетку (2, 5, 2), а обе эти клетки уже заполнены четвёртым грибом. Таким образом, клетку (1, 4, 1) заполнить нельзя. Получили противоречие с тем, что куб полностью заполнен, и наше предположение неверно, то есть из грибов нельзя составить куб 10x10x10, ч. т. д.

Задача 2.

Рассмотрим семейство тел A_n, заданное следующим образом. A_1 – это просто гриб, повёрнутый шляпкой вниз. A_2 – это четыре гриба, шляпки которых расположены в одной плоскости следующим образом:



Ножки грибов также повёрнуты в одну сторону. A_3 – это девять грибов, шляпки которых расположены в одной плоскости соответствующим образом, в виде косого квадрата 3x3, причём ножки всех грибов повёрнуты вниз. И так далее, A_n – это n^2 грибов, шляпки которых расположены в одной плоскости соответствующим образом, в виде косого квадрата nxn, причём ножки всех грибов повёрнуты вниз. Заметим, что у A_n вниз торчат n^2 ножек, а шляпки образуют $(n-1)^2$ дырок.

Теперь рассмотрим семейство тел B_n, составленных следующим образом. $B_1 = A_1$. B_2 состоит из A_1 и A_2, причём A_1 положено в центр A_2, так, что ножка A_1 "воткнулась" в дырку A_2. B_3 состоит из B_2 и A_3, причём B_2 положено в центр A_3, так, что четыре ножки B_2 (они же ножки A_2, входящего в его состав) "воткнулись" в четыре дырки A_3. И так далее, B_n получается, если B_{n-1} положить на A_n, "воткнув" в его $(n-1)^2$ дырку $(n-1)^2$ ножку B_{n-1}. Очевидно, что у тел этого семейства нет полостей.

Понятно, что найдётся такое, достаточно большое тело B_n, что из него можно будет вырезать куб 10x10x10, ч. т. д.

Задача 3.
Вновь применим построение, использованное во второй задаче. Опять же понятно, что найдётся такое, достаточно большое тело B_n, что из него можно будет вырезать куб 10x10x10. В частности, таким, очевидно, будет тело B_{14}. Вырежем из него куб по плоскостям сетки.
Докажем, что любая плоскость, пересекающая куб, пересечёт внутренность хотя бы одного гриба. Разобьём куб на 1000 кубиков 1x1x1. Если плоскость пересекает внутренность одного из этих кубиков, то, так как этот кубик принадлежит B_{14}, она пересекает гриб, которому принадлежит этот кубик. Если же она не пересекает никакой из кубиков 1x1x1, но пересекает куб, то она идёт по граням кубиков 1x1x1. Если она горизонтальна (относительно B_{14}), то она отсекает ножки каких-то грибов, а если она вертикальна, то она, очевидно, пересекает какой-нибудь гриб.

Задача 4.
Да, можно сложить параллелепипед 1x10x12 следующим образом: